MAI 2 - domácí úkol 3 (dobrovolný)

Zkuste promyslet třeba i jen některý z příkladů a řešení „sepsat“.

1. Je dána funkce f : $f(x,y)=xy$ pro $|x|\geq|y|$, $f(x,y)=0$ pro $|x|<|y|$.
   (i) Vyšetřete spojitost funkce f v R^2;
   (ii) Vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;
   (iii) Vyšetřete, zda je funkce f v bodě $(0,0)$ diferencovatelná.
   (iv) Ukažte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$.

2. Je dána funkce f : $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.
   a) Ukažte, že funkce f je spojitá v R^2 .
   b) Vypočítejte $\nabla f(0,0)$;
   c) Ukažte, že funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál, i když nemá bodě $(0,0)$ spojité parciální derivace.

3. a) Ukažte, že má-li funkce $f(X)$ totální diferenciál v bodě $X_0\in R^n$, pak má pro libovolný vektor $\vec{a}\in R^n$, $\vec{a}\neq\vec{o}$ (tak zvanou) derivaci ve směru vektoru $\vec{a}$:

$$D_{\vec{a}}f(X_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(X_0+t\vec{a})-f(X_0)}{t}=\langle\nabla f(X_0),\vec{a}\rangle\ .$$

   b) Zjistěte, zda funkce $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ je v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $\vec{a}=(2,1)$ rostoucí nebo klesající. Najděte vektor $\vec{a}$, $\|\vec{a}\|=1$, v jehož směru funkce f v bodě $(1,1)$ roste nejrychleji.